Europ. J. Combinatorics (1984) **5**, 243–253

Un Problème de Connectivité sur les Espaces Métriques

ALAIN QUILLIOT

If x and y are two points of a compact metric space E, we call connectivity in E between x and y the smallest number of points other than x or y that we must withdraw from E in order to get a metric space which does not admit any continuous path between x and y.

We denote this number by $C_E(x, y)$ and we prove, under some regularity conditions on E, that if $C_E(x, y) < \infty$, then there exists in E a system of $C_E(x, y)$ innerly disjoint continuous paths between x and y.

This result provides us with an extension of Menger's theorem for finite graphs and we show how it may become incorrect when E presents some kinds of irregularities.

1. DÉFINITIONS

Si x et y sont deux points d'un espace métrique compact E, nous nommons connectivité entre x et y dans E, le plus petit nombre de points $\{x_i; i \in I\}$ de E, autres que x et y, qu'il faut retirer de E afin d'obtenir un espace dans lequel x et y ne peuvent être connectés par un chemin continu. (Nous dirons que le retrait des points $\{x_i; i \in I\}$ disconnecte x et y dans E). Nous notons $C_E(x, y)$ la connectivité dans E entre x et y.

Cette définition est bien sûr à rapprocher de la définition de la connectivité entre deux sommets d'un graphe fini [1], [2]; A tout graphe fini $G = (X, E)$ peut être associé un espace topologique compact $G^{\cdot}$, en considérant chaque arête de G comme une copie du segment $[0, 1]$. $G^{\cdot}$ peut être plongé dans $\mathbb{R}^3$ [3], et dès lors est métrisable. D'autre part tout chemin dans G induit un chemin continu dans $G^{\cdot}$. Il devient donc naturel d'essayer de savoir si le théorème de Menger [1], [4], qui est la base de la théorie de la connectivité sur les graphes, peut être généralisé dans ce nouveau contexte, c'est à dire s'il est possible d'écrire:

$C_E(x, y) =$ nombre maximum de chemins continus intérieurement disjoints entre x et y dans E. (Nous noterons $v_E(x, y)$ cette dernière quantité). (1)

L'objet de ce travail va alors être précisément d'examiner dans quelles conditions l'égalité (1) ci-dessus se trouve vérifiée.

2. UN PREMIER CONTRE-EXEMPLE POUR L'ÉGALITÉ (1)

L'égalité (1) est bien sûr vraie si x et y ne sont pas dans la même composante connexe par arcs. Donnons un exemple d'espace pour lequel (1) n'est pas toujours vérifiée:

Dans $\mathbb{R}^2$, notons C_n la ligne brisée allant de $O = (0, 0)$ en $A_n = (1/n, 0)$, puis de A_n en $B = (1, 1)$, (pour $n \geq 1$), et C_0 le segment OB (voir Figure 1).

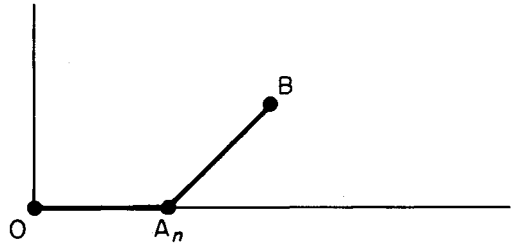

FIGURE 1.

0195-6698/84/030255+11 $02.00/0

$E = \bigcup_{n=0} C_n$ est compact et métrique si on le considère muni de la distance euclidienne.

Il est clair que l'on a: $C_E(\mathrm{O}, \mathrm{B}) = \infty$; $v_E(\mathrm{O}, \mathrm{B}) = 2$; Nous sommes donc conduits à renforcer nos hypothèses relatives à l'espace E.

3. Espaces (p, q)-Convexes; Propriété (P)

Soient x et y deux points d'un espace métrique compact E, de distance d, que nous supposons connexe par arcs.

Nous nommons chaine de pas $a > 0$ entre x et y toute suite finie C:

$$C = \{x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y\}$$

telle que:

$$\forall i \in 0, 1, \ldots, n-1, d(x_i, x_{i+1}) \leq a.$$

La longueur $L(C)$ de C est le nombre:

$$L(C) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Notant $C_a(x, y)$ l'ensemble des chaines de pas a dans E entre x et y, on pose:

$$D_d(x, y) = \operatorname*{Sup\,Inf}_{a>0,\ C \in C_a(x,y)} L(C).$$

[$D_d(x, y)$ peut être égal à $+\infty$].

Nous disons alors que E possède la propriété (P) si D_d définit sur E une distance induisant sur E la même topologie que d.

Si $G = (X, E)$ est un graphe fini, l'espace $G^{\cdot}$ défini au paragraphe vérifie la propriété (P); En fait la majorité des espaces usuels vérifient cette propriété.

Un espace métrique compact E, de distance d, *sera dit (p, q)-convexe* si l'on a:

$$\forall p, q \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in E \text{ tels que } d(x, y) \leq p + q, \text{ on a } B_E(x, p) \cap B_E(y, q) \neq \varnothing.$$

[N.B: $B_E(x, p) =$ boule dans E de centre x et rayon $p = \{y \in E / d(x, y) \leq p\}$].

Si un espace métrique E, muni d'une distance d vérifie la propriété (P), il devient alors clair que muni de la distance D_d construite plus haut, il est (p, q)-convexe.

Réciproquement, si un espace E muni d'une distance d est (p, q)-convexe, alors il est aussi connexe par arcs, vérifie la propriété (P) et on a en fait égalité entre d et D_d.

Nous pouvons alors énoncer:

Proposition 1. *Un espace métrique, compact, connexe par arcs, E, de distance d, vérifie la propriété (P) si et seulement si il est possible de trouver une distance sur E, qui conserve la topologie de E et fait de E un espace métrique (p, q)-convexe.*

L'espace qui a été utilisé comme contre-exemple au paragraphe 2 ne satisfait pas la propriété (P). Nous renforçons donc nos hypothèses sur E en supposant à partir de maintenant que l'espace E considéré vérifie cette propriété. En fait, dans le paragraphe 5, nous supposerons même que cet espace est (p, q)-convexe et nous serons alors amenés à utiliser quelques concepts supplémantaires:

Chemins Géodésiques; Procédés de Correction

Définition. Un chemin continu T entre 2 points x et y d'un espace métrique compact et (p, q)-convexe E, muni d'une distance d, sera dit chemin géodésique entre x et y si l'on a:

$$\forall z \in T, \qquad d(x, z) + d(z, y) = d(x, y).$$

Il est clair que pour tout $x, y \in E$, il existe alors au moins un chemin géodésique dans E entre x et y.

Si a et b sont deux points d'un chemin géodésique T de E, on note $T/[a, b]$ le chemin formé par la restriction de T entre a et b. Ce chemin est bien sûr lui aussi un chemin géodésique.

DÉFINITION. Si T entre x et y, T' entre x' et y', sont deux chemins géodésique de l'espace (p, q)-convexe E, il est facile de vérifier que l'on peut modifier T' de telle sorte que:

$$\forall a, b \in T \cap T', \qquad T/[a, b] \subset T \cap T'.$$

On dira alors que T' est corrigé par rapport à T.

4. UN CONTRE-EXEMPLE POUR L'ÉGALITÉ (1) QUAND $C_E(x, y) = +\infty$, ET QUAND L'ESPACE E SATISFAIT LA PROPRIÉTÉ (P)

Considérons dans l'espace $\mathbb{R}^3$ affine, le plan P_u d'équation $z \cos u = y \sin u$, ($u \in]0, \pi/8[$), le point $A = (1, 0, 0)$ et le point $B_u = (0, \cos u, \sin u)$. Dans P_u repéré par O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_u}$, nous pouvons choisir une courbe C_u telle que:

$$\exists 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 1$$

vérifiant

$$a_1 = u; \qquad 1 - a_n = u; \qquad \forall i \in 1, 2, \ldots, n-1, a_{i+1} - a_i < 2u;$$

et permettant de représenter graphiquement C_u selon la Figure 2. (Nous effectuons ce choix pour tout $u \in]0, \pi/8[$).

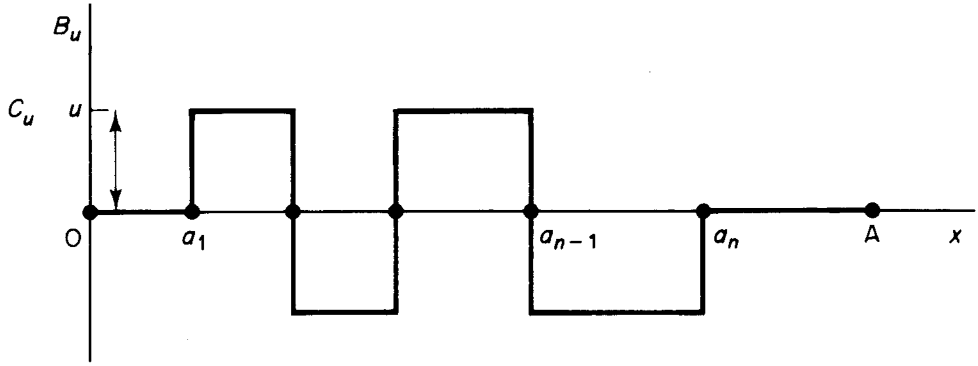

FIGURE 2.

Posons alors:

$$E = [0, A] \cup \left(\bigcup_{n=8}^{\infty} C_{\pi/n} \right).$$

([O, A] = intervalle entre O et A). E est compact, vérifie la propriété (P), et il est clair que la connectivité dans E entre O et A est infinie. Notons A_n la partie discrète de $C_{\pi/n} \cap [O, A]$. (Sur la figure ci-dessus, on a $A_n = \{a_2, \ldots, a_{n-1}\}$). Il est alors facile de voir que les courbes $C_{\pi/n}$ peuvent être en fait choisies de telle sorte que:

$$\forall n, n' \in N, \quad n \neq n', \qquad A_n \cap A_{n'} = \emptyset.$$

Il devient alors *impossible de trouver un système infini de chemins continus intérieurement disjoints entre* O *et* A *dans E.* (Simple vérification.)

REMARQUE. En fait nous notons sur cet exemple, que le nombre $v_E(\mathrm{O}, \mathrm{A})$ n'est ici pas défini, car (et c'est une conséquence de notre résultat principal du paragraphe V qui suit), pour tout entier m, il est possible de trouver un système d'au moins m chemins disjoints continus entre O et A dans E.

5. RÉSULTAT PRINCIPAL

Nous en arrivons maintenant à notre généralisation du théorème de Menger pour les espaces métriques qui vérifient la propriété (P).

THEORÈME 1. *Soit E un espace métrique compact, connexe par arcs et vérifiant la propriété (P) et soient deux points x et y dans E. Alors, pour tout entier p inférieur ou égal à $C_E(x, y)$, (qui peut être éventuellement égal à l'infini), il est possible de trouver un système d'au moins p chemins continus intérieurement disjoints entre x et y dans E.*

REMARQUE. Ce théorème généralise effectivement le théorème de Menger pour les graphes finis, puisque si $G = (X, E)$ est un graphe fini, il suffit d'appliquer le théorème 1 à l'espace $G^{\cdot}$ défini au premier paragraphe pour obtenir le résultat du théorème de Menger.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

La proposition 1 nous permet bien sur de supposer que l'espace E muni de sa distance d est en fait un espace (p, q)-convexe. La difficulté du problème vient alors de ce qu'il est difficile de construire notre système de n chemins continus disjoints entre x et y sans que certains de ces chemins ne fusionnent au voisinnage de x ou de y. Un rapide examen permet de constater qu'un simple raisonnement qui se contenterait d'appliquer le théorème de Menger sur un graphe fini issu d'une discrétisation de E et qui concluerait par compacité ne peut donner le résultat ici.

Nous allons donc être amenés à procéder par étapes et à tout d'abord introduire la notion suivante:

RÉSEAU ROUTIER D'UN ESPACE (p, q)-CONVEXE

Soit donc E notre espace (p, q)-convexe, d sa distance, et x et y deux points distincts dans E. Nous pouvons supposer $d(x, y) > 2$ (sinon nous multiplions d par un coefficient adéquat). Posons:

$$U_0 = E - [B_E(\mathring{x}, 1) \cup B_E(\mathring{y}, 1)]$$

$$U_n = \left[B_E\left(x, \frac{1}{2^{n-1}}\right) - B_E\left(\mathring{x}, \frac{1}{2^n}\right)\right] \cup \left[B_E\left(y, \frac{1}{2^{n-1}}\right) - B_E\left(\mathring{y}, \frac{1}{2^n}\right)\right].$$

RAPPEL. Si $A \subset E$ est une partie d'un espace topologie E, on note $\mathring{A}$ l'intérieux de A et $\bar{A}$ la fermeture de A.

Un réseau routier dans E entre x et y sera alors un système (S, F) du type suivant:

$S \subset E$; $x, y \in S$;

$\forall n \in N$, $S \cap U_n$ est fini;

F est une famille de chemins géodésiques de E, reliant entre eux certains points de S et telle que:

$\forall T, T' \in F$, $T \cap T'$ est vide ou est réduit à une extrémité commune;

$\forall T \in F$, $T \cap U_n$ n'est non vide que pour au plus deux indices $n \in N$.

Un réseau routier (S, F) entre x et y dans E peut alors être clairement interprété à la fois comme un espace métrique $E(S, F)$, compact et vérifiant la propriété (P) (sous réserve d'être connexe) et comme un graphe $G(S, F)$, éventuellement infini. Tout chemin infini et élémentaire dans $G(S, F)$ peut être alors considéré comme un chemin injectif continu de $E(S, F)$ entre x et y et réciproquement.

LEMME 1. *L'égalité suivante est vraie:*

$$C_{E(S,F)}(x, y) = v_{E(S,F)}(x, y) = \textit{une quantité finie.}$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que $C_{E(S,F)}(x, y)$ est fini et que l'on a:

$$v_{E(S,F)}(x, y) \leq C_{E(S,F)}(x, y).$$

Posons $k = C_{E(S,F)}(x, y) = k > 0$ et considérons le graphe fini $G_n(S, F) = (X_n, V_n)$ formé de la façon suivante $(n > 0)$:

$$\begin{cases} X_n = S - \left[\left[B_E\left(\mathring{x}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cup B_E\left(\mathring{y}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] \cap S\right]; \\ a, b \in X_n \text{ sont adjacents dans } G_n(S, F) \text{ si ils sont adjacents dans } G(S, F) \text{ ou bien si} \\ \quad \text{l'on a: } a = x \text{ (ou } y) \text{ et } d(a, b) \leq 1/2^n. \end{cases}$$

La connectivité dans $G_n(S, F)$ entre x et y est au moins égale à k. Il existe donc (théorème de Menger) k chemins élémentaires $T_{n,1}, \ldots, T_{n,k}$, deux à deux disjoints, entre x et y dans $G_n(S, F)$.

Un simple raisonnement de limite inductive permet alors de déduire, quand n tend vers $+\infty$, k chemins élémentaires infinis et deux à deux disjoints dans $G(S, F)$, c'est à dire aussi k chemins continus disjoints entre x et y dans $E(S, F)$, soit le résultat.

Revenons maintenant au problème principal; Nous allons essayer de construire un réseau routier (S, F) sur E entre x et y tel que l'on ait:

$$C_{E(S,F)}(x, y) \geq p.$$

Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 2. *Soit $x_0 \in U_0$; Il existe un nombre $h(x_0)$ tel que pour tout système de $(p-1)$ points $x_2, \ldots, x_p$ dans $E - \{x, y, x_0\}$, il soit possible de trouver un chemin continu T entre x et y dans E, qui évite $x_2, \ldots, x_p$, et dont la distance à x_0 soit au moins égale à $h(x_0) > 0$.*

DÉMONSTRATION. Supposons l'inverse; on peut alors supposer l'existence d'une suite de chemins continus T_n entre x et y et de $(p-1)$ suites de points $\{x_{2,n}\}, \ldots, \{x_{p,n}\}$, $(n \in N)$

dans E, telles que:

$$\begin{cases} \forall n \in N,\ T_n \text{ évite } x_0, x_{2,n}, \ldots, x_{p,n}; \\ \text{distance de } T_n \text{ à } x_0 \leq 1/n; \\ \text{il n'est pas possible de trouver un chemin continu } T'_n \text{ entre } x \text{ et } y, \text{ qui évite } x_{2,n}, \ldots, x_{p,n} \\ \quad \text{et dont la distance à } x_0 \text{ soit plus grande que } 1/n. \end{cases}$$

On peut bien sûr supposer que les suites $\{x_{2,n}\}, \ldots, \{x_{p,n}\}$, $(n \in N)$, convergent dans E vers des points

$$\underbrace{x_2, \ldots, x_k}_{\neq x_0}, \underbrace{x_{k+1}, \ldots, x_p}_{= x_0}.$$

Prenons $r > 0$ tel que:

$$\{x, y, x_2, \ldots, x_k\} \cap B_E(x_0, r) = \emptyset.$$

Posons W = ensemble des couples (α, β) avec α et $\beta \in \{x, y, x_2, \ldots, x_k\}$. Un chemin T_n peut bien sûr être pris injectif et être considéré comme une somme finie de sous-chemins $T_{n,u} (u \in W)$ ayant pour éxtrémités les éléments du couple $u = (\alpha, \beta)$, et ne contenant aucun autre point de $\{x, y, x_2, \ldots, x_k\}$ que α et β. (avec α et β distincts).

Le nombre de chemins $T_{n,u}$ intervenant dans une telle décomposition est au plus égal à $\binom{k+1}{2}$.

Posons $W' = \{u \in W$ tels qu'il existe une quantité infinie d'indices n pour lesquels un chemin $T_{n,u}$ apparait dans la décomposition de $T_n\}$.

On peut (en éliminant au besoin certains des premiers éléments de la suite T_n $(n \in N)$, supposer que pour tout $u \in W$ on a:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Il existe un indice } n \in N, \text{ pour} \\ \text{lequel un chemin } T_{n,u} \text{ apparait dans} \\ \text{la décomposition de } T_n \end{array}\right| \Rightarrow u \in W'.$$

Pour $u = (\alpha, \beta)$ donné dans W' et n tel que $T_{n,u}$ soit défini, il est possible de considerer que $T_{n,u}$ 'va' de α en β et donc de définir 'l'entrée' $a_{n,u}$ de $T_{n,u}$ dans $B_E(x_0, r)$ et aussi sa 'sortie' $b_{n,u}$ de $B_E(x_0, r)$ (voir Figure 3). On peut bien sûr supposer que les $a_{n,u}$ et les $b_{n,u} (n \in N)$ forment des suites de Cauchy.

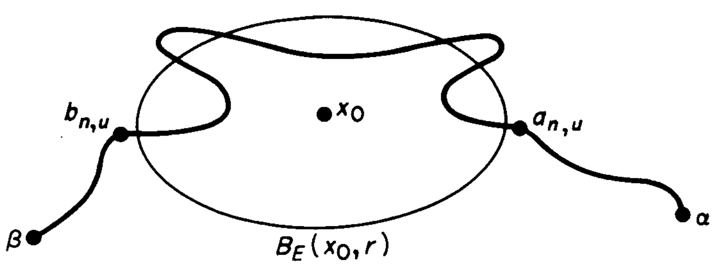

FIGURE 3.

On peut alors trouver $n_0(u) \in N$ assez grand tel que:

$T_{n_0(u),u}$ est défini;

$\forall n, m \geq n_0(u)$ tels que $T_{n,u}$ et $T_{m,u}$ soient définis, on a les inégalités: $d(a_{n,u}, a_{m,u})$ et $d(b_{n,u}, b_{m,u}) \leq r/2$;

Tout géodésique $L_{n,m,u}$ entre $a_{n,u}$ et $a_{m,u}$ (ou $L'_{n,m,u}$ entre $b_{n,u}$ et $b_{m,u}$) défini avec $n, m \geq n_0(u)$, évite les points $x_{j,q}$; $j \in 2, \ldots, p$; $q \geq n_0(u)$.

Posons donc $n_0 = \operatorname{Sup}_{u \in W'} n_0(u)$.

Soit alors un chemin T_n, $(n \geq n_0)$ qui se décompose comme suit:

$$T_n = T_{n,u} + T_{n,v} + \cdots + T_{n,t}, \qquad u, v, \ldots, t \in W',$$

$$u = (x, \alpha), \quad v = (\alpha, \beta), \quad \ldots, \qquad t = (\gamma, y).$$

Construisons un chemin $T'_{n,u}$ comme suit:

$T'_{n,u}$ va de x en $a_{n,u}$ par T_n; puis de $a_{n,u}$ et $a_{n_0(u),u}$ par $L_{n,n_0(u),u}$; puis de $a_{n_0(u),u}$ en $b_{n_0(u),u}$ par $T_{n_0(u)}$; puis de $b_{n_0(u),u}$ en $b_{n,u}$ par $L'_{n,n_0(u),u}$; puis de $b_{n,u}$ et par T_n.

On construit de même $T'_{n,v}, \ldots, T'_{n,t}$ et on pose:

$$T'_n = T'_{n,u} + \cdots + T'_{n,t}.$$

Il est clair que si n est assez grand, la portion de $T_{n_0(u),u}$ définie entre $a_{n_0(u),u}$ et $b_{n_0(u),u}$ ne contient aucun point $x, y, x_2, \ldots, x_k$ et aucun point $x_{2,n}, \ldots, x_{p,n}$.

Mais dans le même temps, la distance de T'_n à x_0 ne converge pas vers 0 quand n devient grand et cela induit une contradiction avec la façon dont ont été définis les chemins T_n. Le lemme 2 se trouve alors démontré.

LEMME 3. *Il est possible de trouver une suite de nombres positifs $h_0, \ldots, h_n, \ldots$, tel que pour tout p-uple $(x_1, \ldots, x_p) \in U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_p}$, il existe un chemin continu T entre x et y tel que*:

$$\forall j \in 1, 2, \ldots, p, \text{ distance de } x_j \text{ à } T \geq h_{i_j}.$$

Reprenons le résultat du lemma 2; On aurait en fait sans difficulté pu le formuler ainsi:

$$\begin{cases} \text{Soient } x_0, \ldots, x_{k-1},\ k \text{ points fixés dans } U_0;\ (k \leq p). \\ \text{Il existe un nombre positif } h(x_0, \ldots, x_{k-1}) \text{ tel que pour tout système de } p-k \text{ points} \\ \quad x_{k+1}, \ldots, x_p \text{ dans } E - \{x, y\}, \text{ il existe un chemin continu } T \text{ entre } x \text{ et } y, \text{ qui évite} \\ \quad x_{k+1}, \ldots, x_p \text{ et dont la distance à chacun des points } x_0, \ldots, x_{k-1} \text{ est au moins égale} \\ \quad \text{à } h(x_0, \ldots, x_{k-1}). \end{cases}$$

Un argument de compacité permet alors de voir que le nombre $h(x_0, \ldots, x_{k-1})$ peut être en fait pris égal à un certain nombre h_0 indépendant de k et de $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Reprenant le raisonnement du lemma 2, on peut alors prouver aussi l'assertion suivante:

Soient $x_0, \ldots, x_{k-1}$, k points de U_1; $k \leq p$.

$$\begin{cases} \text{Il existe un nombre positif } h(x_0, \ldots, x_{k-1}) \text{ tel que pour tout système de } p-k \text{ points} \\ \quad x_{k+1}, \ldots, x_p \text{ dans } E - \{x, y\}, \text{ il existe un chemin continu } T \text{ entre } x \text{ et } y, \text{ qui évite} \\ \quad x_{k+1}, \ldots, x_p, \text{ dont la distance à chacun des points } x_0, \ldots, x_{k-1} \text{ est au moins égale} \\ \quad \text{à } h(x_0, \ldots, x_{k-1}) \text{ et dont la distance à ceux des points } x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p \\ \quad \text{qui sont dans } U_0 \text{ est au moins égale à } h_0. \end{cases}$$

Cette assertion se prouve sans difficulté en reproduisant le schéma de démonstration du lemme 2, et on peut voir là encor par un raisonnement de compacité que le nombre $h(x_0, \ldots, x_{k-1})$ peut en fait être pris égal à un certain $h_1 > 0$, indépendant de k et des points $x_0, \ldots, x_{k-1}$ dans U_1.

Il est clair que ce raisonnement se poursuit, et qu'il permet de construire une suite de nombre $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$, qui correspond à l'énoncé du lemme 3.

LEMME 4. *Soit S une famille de points dans $X - \{x, y\}$ telle que*: $\forall n \in N$, $S \cap U_n$ *est fini. Soit F une famille de chemins géodésiques entre certains points de S, telle que s'il existe un chemin dans F entre a et b appartenant à S, alors a et b sont dans une même union*

$U_n \cup U_{n+1}$ et on a: $d(a, b) \leqslant 1/2^{n+1}$. Alors F peut être en fait remplacée par une autre famille de chemins géodésiques F' telle que: $\forall T, T' \in F'$, $T \cap T'$ est une union finie de chemins géodésiques disjoints deux à deux; deux points a et b étant donnés dans S, s'il existe un chemin de F entre a et b, alors il existe aussi un chemin de F' entre a et b.

Démonstration. Il est clair que pour tout $n \in N$, la quantité de chemins de F qui intersectent U_n est finie. Dès lors F peut être ordinnée en une suite:

$T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ finie ou non (car F est au plus dénombrable). On corrige alors T_1 par rapport à T_0, puis T_2 par rapport à T_0, puis par rapport à T_1 puis T_3 par rapport successivement à T_0, T_1, T_2 et ainsi de suite. (Voir la définition du processus de correction à la fin du paragraphe 3).

Chaque chemin T_i ne subit qu'un nombre fini de manipulations, et c'est un simple raisonnement par induction qui permet alors de voir qu'à l'issue du processus on obtient une famille F' de chemins $T'_0, \ldots, T'_n, \ldots$, du type cherché.

Nous sommes alors en mesure d'achever la démonstration de notre théorème 1. Reprenant la suite $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ du lemme 3, que nous pouvons supposer décroissante et bornée par 1, nous pouvons lui associer sans difficultés (processus inductif) une suite croissante u_n de nombres au moins égaus à 10 et tels que:

$$\forall n \in N, \ \frac{h_n}{u_n} \leqslant \frac{1}{10^n}; \qquad \frac{3h_n}{u_n} \leqslant \frac{h_{n+1}}{2}; \qquad \frac{3h_{n+1}}{u_{n+1}} \leqslant \frac{h_n}{u_n}.$$

Nous exhibons alors (c'est possible) un système S_0 de points de E tel que:

$$\begin{cases} \forall n \in N, S_0 \cap U_n \text{ est fini;} \\ x, y \in S_0; \\ \forall a \in U_n, \exists b \in S_0 \cap U_n \text{ vérifiant } d(a, b) \leqslant \dfrac{h_{n+1}}{u_{n+1}}. \end{cases}$$

A tout couple a, b de points contenus dans $S_0 \cap (U_n \cup U_{n+1})$, tel que $\{a, b\} \cap [U_n - U_{n+1}]$ n'est pas vide, et tel que $d(a, b) \leqslant h_n/u_n$, nous associons un chemin géodésique $T(a, b)$ entre a et b.

Nous obtenons ainsi une familie de chemins géodésiques, que nous notons F_0 et le lemme 4 nous permet d'affirmer que F_0 peut en fait être choisie de telle sorte que l'intersection de deux chemins de F_0 soit toujours une union finie de chemins géodésiques disjoints.

Il est alors possible de compléter S_0 en rajoutant tous les points de E qui peuvent être considérés comme extrémités de chemins formant les intersections $T(a, b) \cap T(a', b')$ $(a, b, a', b' \in S_0)$, et de subdiviser les chemins de F_0 de telle sorte que le système (S, F) alors induit soint un réseau routier entre x et y. Soit alors un p-uple $x_1, \ldots, x_p$ dans $U_{i_1}, \ldots, U_{i_p}$.

Il existe un chemin continu L entre x et y tel que $\forall j \in 1, \ldots, p$; distance de L à $x_j \geqslant h_{i_j}$. Un simple raisonnement de compacité permet de vérifier qu'il est possible de trouver une suite de points $\{a_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ sur L telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut trouver $p(n) \in N$ vérifiant:

$$\begin{cases} L/[a_n, a_{n+1}] \text{ est situé dans une même région } U_{p(n)} \cup U_{p(n)+1} \text{ et son intersection avec} \\ \quad U_{p(n)} - U_{p(n)+1} \text{ est non vide.} \\ \forall a, b \in L/[a_n, a_{n+1}], d(a, b) \leqslant \dfrac{h_{p(n)+1}}{u_{p(n)+1}}. \end{cases}$$

[N.B: $p(n)$ est alors unique]. Pour tout $n \in N$, il est alors possible de trouver $h_n \in S$ tel que:

$$\text{si } a_n \in U_{p(n)+1}, \quad \text{alors} \quad b_n \in U_{p(n)+1}, \quad \text{et} \quad d(a_n, b_n) \leqslant \frac{h_{p(n)+2}}{u_{p(n)+2}};$$

$$\text{si } a_n \in U_{p(n)} - U_{p(n)+1}, \quad \text{alors} \quad b_n \in U_{p(n)} \quad \text{et} \quad d(a_n, b_n) \leqslant \frac{h_{p(n)+1}}{u_{p(n)+1}}.$$

Il est alors clair que l'on a:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad d(b_n, b_{n+1}) \leqslant \frac{3h_{p(n)+1}}{u_{p(n)+1}} \leqslant \frac{h_{p(n)}}{u_{p(n)}}.$$

Il existe donc un chemin $T(h_n, b_{n+1})$ de F entre b_n et b_{n+1} et la distance entre un point de $T(b_n, b_{n+1})$ et un point de $L/[a_n, a_{n+1}]$ est au plus égale à $3h_p(n)/u_p(n) \leqslant \frac{1}{2}h_{p(n)+1}$. Cela nous permet d'affirmer que le chemin L' obtenu en juxtaposant les chemins $T(b_n, b_{n+1})$, $(n \in \mathbb{Z})$ ne contient aucun des points $x_1, \ldots, x_p$. L' est d'autre part clairement un chemin de l'espace $E(S, F)$ induit par le réseau routier (S, F), et les extrémités de L' sont x et y. Effectuant ce raisonnement pour tous les p-uples $x_1, \ldots, x_p$ de

$$\underbrace{E - \{x, y\} \times \cdots \times E - \{x, y\}}_{p \text{ fois}},$$

nous vérifions en fait que la connectivité entre x et y dans $E(S, F)$ est au moins égale à p. Il nous suffit alors d'appliquer le lemme 1 à $E(S, F)$ pour achever la démonstration du théorème 1.

6. Quelques Questions Annexes

(a) L'égalité $v_E(x, y) = C_E(x, y)$ vaut-elle dès lors que $C_E(x, y)$ est fini (aucune hypothèse n'étant effectuée sur la distance dans E). La réponse est non.

Considérons en effet dans $\mathbb{R}^3$ les points:

$$\mathrm{A} = (-1, 0, 0), \qquad \mathrm{B} = (1, 0, 0), \qquad \mathrm{C} = (0, 0, 0), \qquad \mathrm{D} = (0, 1, 0),$$

$$\mathrm{U}_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right), \qquad \mathrm{V}_n = \left(-1 + \frac{1}{n}, 0, 0\right), \qquad n \geqslant 2,$$

et l'espace E union des segments AB, DC, BD, $\mathrm{U}_n\mathrm{V}_n$, $\mathrm{U}_n\mathrm{D}$ $(n \geqslant 2)$ (voir Figure 4).

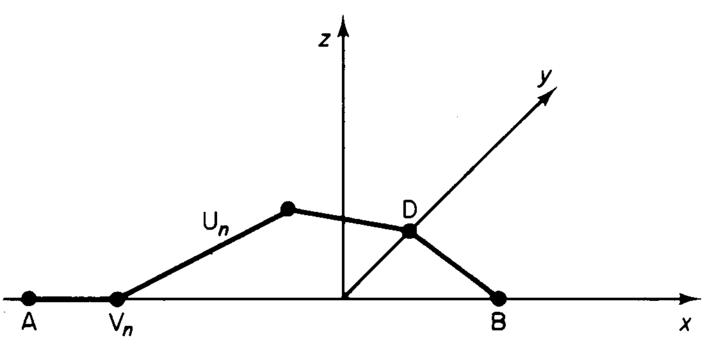

FIGURE 4.

E ainsi construit est compact; les lignes brisées $\mathrm{DU}_n\mathrm{V}_n$ $(n \geqslant 2)$ sont deux à deux disjointes, et il est aisé d'en déduire:

$$C_E(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 2 \quad \text{et} \quad v_E(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 1.$$

(b) E étant notre espace métrique compact, A et B 2 parties de E, notons $v_E(A, B)$ le nombre maximum de chemins continus 2 à 2 disjoints reliant A et B, et $C_E(A, B)$ le nombre minimum de points qu'il faut retirer de E pour obtenir un espace dans lequel A et B ne sont plus reliables par un chemin continu. Quand l'égalité $C_E(A, B) = v_E(A, B)$ se trouve-t-elle vraie? (Nous savons que cette égalité peut permettre d'exprimer le théorème de Menger dans le cas des graphes finis).

Il est aisé de vérifier qu'elle se trouve vérifiée dès que $C_E(A, B) < \infty$ et ce sans autre restriction sur l'espace E considéré que la compacité.

On peut par exemple s'en rendre compte en remarquant que si l'on pose $C_E(A, B) = k$ il est possible d'associer à tout $(k-1)$-uple $x_1, \ldots, x_{k-1} \in E^{k-1}$, un chemin $T_{x_1,\ldots,x_{k-1}}$ continu allant de A en B et évitant chacun des points $x_1, \ldots, x_{k-1}$. On en déduit par compacité de E une famille finie $\{T_i$, allant de $a_i \in A$ en $b_i \in B$, $i \in I\}$ de chemins continus injectifs telle que dans l'espace $E' = \bigcup_{i \in I} T_i$, muni de la topologie de sous-espace de E, on ait:

$$C_{E'}(A', B') = k \quad \text{avec} \quad A' = \{a_i\,;\, i \in I\} \text{ et } B' = \{b_i\,;\, i \in I\}.$$

D'autre part l'espace E' ainis construit peut être muni d'une métrique respectant la propriété (P) et on conclut aisément.

L'égalité $C_E(A, B) = v_E(A, B)$ n'est par contre plus forcément vraie dès lors que $C_E(A, B)$ est infinie. [Même en supposant vérifiée la propriété (P)].

Pour le voir on effectue la construction suivante:

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, nous considérons les points $a = (0, 0, 0)$, $b = (1, 0, 0)$ et nous notons P_u le plan d'équation $z = t \tan u (u \in]0, \pi/2[)$.

A tout $n \in N$ $(n \geq 2)$, nous associons un recouvrement fini $F_n = \{U_{n,i}, i \in I(n)\}$ du segment ab par des sous-segments de longueur $1/n$ ouverts, et nous comptons tous ces sous-segments au moyen d'une fonction injective Φ qui à tout couple n, i associe $\Phi(n, i) \in N^+$ de telle sorte que:

$$\forall i, j \quad i \in I(n), \quad j \in I(n'), \qquad n < n' \Rightarrow \Phi(n, i) < \Phi(n', j).$$

Dans le plan $P_{\pi/3\Phi(n,i)}$, nous considérons alors une courbe $C_{n,i}$ qui a la forme de Figure 5.

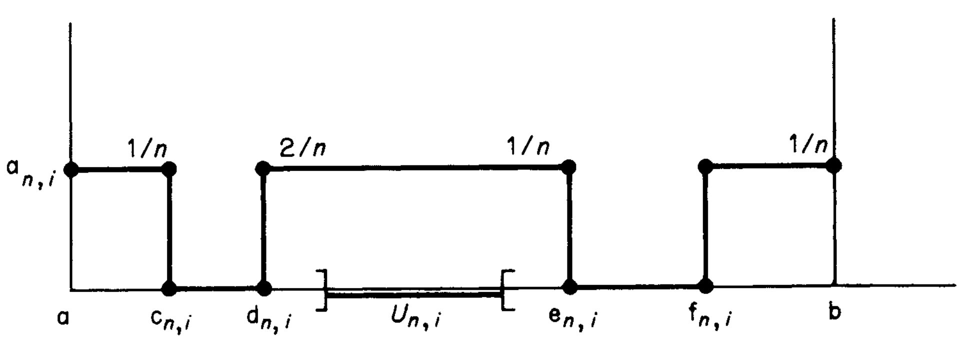

FIGURE 5.

EXPLICATION. La direction au correspond dans $\mathbb{R}^3$ au vecteur $(0, \cos(\pi/3\Phi(n, i)), \sin(\pi/3\Phi(n, i)))$. Dans le plan $P_{\pi/3\Phi(n,i)}$ ainsi repéré, on a:

$a_{n,i} = (0, 1/n)$; $b_{n,i} = (1, 1/n)$;
abscisse de $c_{n,i} < 1/n$;
$1 -$ abscisse de $f_{n,i} < 1/n$;
abscisse de $e_{n,i} -$ abscisse de $d_{n,i} \in]1/n, 2/n[$;
dans le cas où $a \in U_{n,i}$, le point $c_{n,i}$ n'existe pas;
dans le cas où $b \in U_{n,i}$, le point $f_{n,i}$ n'existe pas.

Il est enfin possible de faire en sorte en choisissant les courbes $C_{n,i}$, que tous les points $c_{n,i}$, $d_{n,i}$, $e_{n,i}$, $f_{n,i}$ $(n \in N, i \in I(n), n \geq 2)$ soient distincts. On vérifie alors que l'espace E défini par:

E = segment ab
union A = disque de centre a et rayon 1 situé dans le plan $x = 0$
union B = disque de centre b et rayon 1 situé dans le plan $x = 1$
union {toutes les courbes $C_{n,i}$, $n \in N$, $n \geq 2$, $i \in I(n)$}

muni de la topologie de distance euclidienne dans $\mathbb{R}^3$ est compact, satisfait la propriété (P), qu'il n'est pas possible de trouver une famille infinie de chemins continus deux à deux disjoints reliant A et B dans E, et que l'on a cependant:

$$C_E(A, B) = \infty.$$

(c) Les raisonnements utilisés tout au long de cet exposé exigent clairement que l'espace E considéré soit compact et possède une base dénombrable d'ouverts (et donc soit métrisable). En rajoutant la propriété (P), nous rajoutons en fait essentiellement la connectivité locale par arcs. Réciproquement, et nous ne connaissons pas la réponse à cette question, est il toujours possible de choisir la métrique d'un espace métrisable compact et localement connexe par arcs de façon à obtenir la propriété (P)? Cela semble vrai pour tous les espaces usuels, mais peut-on rencontrer des 'pathologies'?.

RÉFÉRENCES

1. C. Berge, *Graphes et Hypergraphes.* Edité chez Dunod, 1970, pp. 159–178.
2. F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
3. A. White, Graphs, groups and surfaces, in North-Holland, Amsterdam, 1974, pp. 20–30.
4. K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.* **10** (1926), 96.

Received 21 February 1983 and in revised form 26 October 1983

ALAIN QUILLIOT
Université de Grenoble, I.M.A.G. BP 68, Grenoble 38041, France